Т. А. Калмыкова

Дальневосточный федеральный университет,

Школа естественных наук,

kalmykova.ta@dvfu.ru

СВОЙСТВА ВЫПУКЛОСТИ И ВОГНУТОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной работе изучаются свойства монотонности, выпуклости и вогнутости обобщенных двухпараметрических тригонометрических и гиперболических функций. Исследование указанных свойств основывается на использовании основной леммы и доказательстве некоторых неравенств.

Определим двухпараметрическую обобщенную функцию $\sin_{p,q}(y)$ как функцию, обратную к интегралу:

$$y = F_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^q)^{1/p}},$$

$p, q > 1$, $x \in (0,1)$, $y \in (0, \pi_{p,q}/2)$, где

$$\pi_{p,q} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^q)^{1/p}}.$$

Эта функция распространяется по симметрии на $(0, \pi_{p,q})$, затем по нечетности на $(-\pi_{p,q}, \pi_{p,q})$ и по периодичности – на все действительные значения y. В свою очередь, функцию $\operatorname{sh}_{p,q}(y)$ определим как функцию, обратную к интегралу

$$y = F_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^q)^{1/p}},$$

для положительных x и y, затем распространяем ее по нечетности для отрицательных y.

Утверждение. *Функция* $p \mapsto \sin_{p,q}(y)$ *вогнута на интервале* $(1,\infty)$ *для* $y \in [0, \pi_{p,q}/2]$ *и* $q \in (1,\infty)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $p \in (0,\infty)$

$$\frac{qx^{q-1}}{p(1-x^q)}\left(\int_0^x \beta(p,t)dt\right)^2 - \frac{2\log(1-x^q)}{(1-x^q)^{1/p}}\int_0^x \beta(p,t)dt +$$

$$+\frac{1}{(1-x^q)^{1/p}}\int_0^x \gamma(p,t)dt \geqslant 0.$$

Здесь

$$\beta(p,t) = \frac{\log(1-t^q)}{(1-t^q)^{1/p}}, \quad \gamma(p,t) = \frac{\log(1-t^q)(\log(1-t^q)-2p)}{(1-t^q)^{1/p}}.$$

Знак неравенства будет строгим тогда и только тогда, когда соответствующее свойство выполняется строго.

Аналогичные утверждения можно получить и для обобщенных двухпараметрических гиперболических функций.

Стоит отметить, что обобщенные тригонометрические функции возникают как собственные функции одномерного p-лапласиана и находят применение во многих разделах математики, таких как, например, теория аппроксимации, функциональный анализ (в частности, теория операторов) и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022).

ЛИТЕРАТУРА

1. Baricz A., Bhayo B. A., Klen R. *Convexity properties of generalized trigonometric and hyperbolic functions.* – Aequat. Math., 2013. – DOI 10.1007/s00010-013-0222-x.

2. Bhayo B. A., Vuorinen M. *On generalized trigonometric functions with two parameters* // J. Approx. Theory. – 2012. – V. 164. – P. 1415–1426.

3. Karp D. B., Prilepkina E. G. *Parameter convexity and concavity of generalized trigonometric functions* // J. of Math. Analysis and Appl. – 2014 (to appear).

Э. Н. Карабашева

Казанский государственный

архитектурно-строительный университет,

enkarabasheva@bk.ru

СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО ТОЧЕК РАЗРЫВА И ДВУСТОРОННЕЕ ЗАВИХРЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РАЗНОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА

Рассматривается следующая краевая задача Гильберта: определить аналитическую и ограниченную в верхней полуплоскости D функцию $\Phi(z)$ по заданному краевому условию:

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = c(t),\ t \in \partial D,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданные на контуре L вещественнозначные функции точки t контура L, непрерывные всюду, кроме точек разрыва первого рода в двух монотонных последовательностях точек t_j, t_{-j}, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$, которые сходятся к $+\infty$, $-\infty$, соответственно. Условие $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$ выполнено во всех точках непрерывности коэффициентов краевого условия. Непрерывная составляющая функции $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ может быть представлена в виде:

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{cases} \nu^- t^{\rho^-} + \varphi(t),\ t < 0, \quad 0 \leqslant \rho^- < 1, \\ \nu^+ |t|^{\rho^+} + \varphi(t),\ t > 0, \quad 0 \leqslant \rho^+ < 1. \end{cases}$$